
La démonstration

Étymologie : démontrer dérive du latin “de-monstrare” : “montrer en partant de, à partir de”, même préfixe que dans “déduire”.

Eléments de Définitions :

- opération mentale, type de raisonnement, d'inférence, qui consiste à établir la vérité d'une proposition en (au moyen) la rattachant (un raisonnement rigoureusement conduit) à des propositions évidentes ou déjà établies.
- Force de démonstration : objectivation de la preuve, universalité de la voie, nécessité du lien entre les différentes parties : déduction valide.
- raisonnement permettant de **déduire** (type d'inférence), de tirer une conclusion à partir d'hypothèses de départ, de propositions premières.
- la démonstration suppose un **processus** constitué de différentes **étapes**, c'est donc une modalité **médiate** d'établissement de la vérité (# intuition, évidence : saisie immédiate de la vérité)
- la démonstration est un mode **discursif** d'établissement de la vérité et non pas **intuitif**, immédiat. Elle passe donc par le biais du discours, elle est **objectivée**, extériorisée.
- Modalité d'établissement de la vérité en se fondant (trait essentiel) uniquement sur la **cohérence interne** du raisonnement, ie en ne prêtant attention qu'aux rapports logiques qui existent entre les propositions d'un raisonnement : **vérité formelle** (versus vérité matérielle : étude du contenu des propositions). Elle vise donc l'établissement de la **validité formelle**.
- mode de raisonnement obéissant aux seules **règles** que la pensée se donne à elle-même (règles de la logiques, des mathématiques) : des conventions rationnelles mises en évidence par la logique formelle.
- **moyen** qui permet d'atteindre une **fin** : établir la vérité de manière irréfutable, universellement, nécessairement et objectivement

Quelle est la finalité de la démonstration ?

- démonstration cherche à établir un type particulier d'évidence : celle qui passe par un travail de l'esprit, un raisonnement, ie une pensée en plusieurs temps.

Travail qui requiert de l'attention et de l'effort : mettre en évidence l'ensemble des idées intermédiaires qui permettront de percevoir le rapport entre les deux idées énoncées. (Locke, *Essai sur l'entendement humain*)

- fonction logique de la démonstration : organiser les propositions en système nécessaire, objectif, cohérent et universel.
- fonction psychologique de la démonstration : déterminer l'assentiment, l'adhésion rationnelle, l'accord universel

Questions : Quelle est l'essence de la démonstration ? Pourquoi s'interroger sur l'essence de la démonstration ?

Ce que l'on croit savoir de la démonstration est-il vrai ? Pourquoi est-il important de répondre à cette question ?

PB :

- Comment établir, prouver, la vérité d'une théorie par essence immatérielle, médiante et abstraite, ie que l'on ne peut percevoir par le biais des sens, concrets, immédiats et sensibles ?
- Comment faire pour voir la vérité au moyen de la raison, qui est par essence immatérielle et non-sensible, avec autant de force de conviction que celle que l'on a grâce au sens de la vue par définition sensible et corporelle ? Raison rivaliser Sens
- Comment faire de la raison un outil infaillible permettant d'atteindre la vérité si l'être humain est par essence faillible ?

- Quelle légitimité ? quel pouvoir ? Quelles limites ? Entre désir et réalité.
- Quel degré de vérité puis-je espérer atteindre et en quel domaines, à quelles conditions ?
- La démonstration est-elle le moyen parfait pour atteindre la vérité absolue ? Ou bien la vérité sera-t-elle toujours relative en attendant mieux ?

Champs d'intervention de la notion de démonstration :

- vie quotidienne
- sciences formelles
- argumentation : convaincre / persuader

I- Origine du désir de démonstration (distinction conceptuelle : montrer / démontrer)

Montrer	Démontrer
On montre en faisant appel au sens de la vue, on se base sur la perception sensible pour faire voir qqchose, on se sert de l'évidence sensible - atteindre l'évidence : chose que l'esprit peut apercevoir immédiatement et sans effort	On démontre au moyen d'arguments rationnels, on ne fait donc appel pour réaliser la finalité d'établir la vérité qu'aux forces de l'esprit qui permettent d'atteindre des évidences rationnelles : ce que l'on ne peut réfuter, ce qui est nécessairement conclu compte tenu de ce qui précède
Intuition sensible, accès direct par les sens à la réalité matérielle, concrète, physique.	Raisonnement abstrait, accès médiatisé par les étapes du raisonnement à une conclusion formelle
Perception sensorielle	Validité formelle d'un raisonnement
Exhiber sans explication ni justification, sans médiation,	
Apophantique, description empirique, affirmer, déclarer	Apodictique, mise en œuvre d'une chaîne de raisons, jugement qui présente un caractère d'universalité et de nécessité absolue (# dialectique : probabiliste).

Au sens large, démontrer signifie « donner à voir », manifester de manière ostentatoire, indubitable, incontestable « démonstration de joie ou de colère », « qq'1 de très démonstratif » : donne à voir ses émotions, ses sentiments par opposition à qq1 qui garde en lui, à l'intérieur de lui et donc laisse invisible la vérité émotionnelle.

Dans un autre registre : « démonstration de force » qui vise à impressionner, à manifester la puissance en vue d'inspirer la crainte.

Faire une démonstration : mettre en œuvre qqchose, prouver par les faits que qqchose fonctionne est efficace, etc ...

On oppose traditionnellement la vision sensible comme trompeuse, comme accès à des apparences sensibles, conception développée notamment dans « L'Allégorie de la caverne » que Platon décrit en *République* VII, à la connaissance par voie démonstrative, purement rationnelle, caractérisée par un usage rigoureux, réglé, discipliné de la raison seule capable d'atteindre la vérité de l'être au-delà des apparences.

Mais l'idéal de la vision de la vérité demeure : les lumières de la raison mettent face à l'évidence intellectuelle de la conclusion d'une démonstration.

Peut-on voir la vérité comme on voit le soleil ?

La démonstration est-elle un pis aller faute de pouvoir « croire ce que l'on voit » afin de savoir abstraitement ce qui est ? Parler de démonstration n'est-ce pas encore attester de la prégnance du désir de saisir directement avec l'impact et la puissance de conviction que provoque la perception, l'épreuve, la rencontre physique de la réalité matérielle sensible d'un objet posé devant soi qui, seule, pourrait me donner la certitude tant espérée d'être face à la vérité ?

La raison peut-elle faire voir, donner à voir la vérité imperceptible ?

L'idéal ne serait-il pas de pouvoir garder la force de conviction de la puissance sensible empirique réelle mais sans les défauts de la haute faillibilité de la perception sensorielle, de produire qqchose comme une perception intellectuelle ?

Idéal d'un moyen totalement fiable, infaillible, pour atteindre la vérité, moyen dont il suffirait d'user avec discipline pour être assuré, pour avoir la garantie d'atteindre la vérité au bout du chemin. Est-ce un fantasme impossible à réaliser, une pure logique irréaliste du désir, un rêve inaccessible ou bien une ruse inventable au moyen de l'intelligence humaine ?

Quels sont les moyens fiables pour atteindre le vrai ? Existe-t-il des moyens infaillibles d'atteindre le vrai ? Peut-on inventer une méthode qui atteigne une fiabilité comparable à celle que la machine à calculer peut atteindre dans son domaine ?

- Démontrer / croire : celui qui croit ne peut justifier sa croyance ie donner les raisons objectives qui font qu'il croit / celui qui démontre tire sa certitude de principes objectifs universels et nécessaires.
- Convaincre / persuader
La démonstration, qui vise à convaincre, se situe à l'opposé de l'action de montrer et du discours visant à persuader : dans le registre discursif la démonstration s'oppose au recours à la sensibilité pour emporter l'adhésion. Fondement rationnel de l'assentiment, de l'accord que l'on donne, que l'on accorde à une proposition.
- Démontrer / prouver : prouver = probare (lat), "approuver", "faire approuver" : éprouver, mettre à l'épreuve une proposition qui de prime abord est douteuse. La preuve assure que la réalité est bien telle qu'on la dit mais ne dit pas pourquoi elle est ainsi.

II- La science formelle de la démonstration : La logique

A) Théorie du syllogisme d'Aristote

In *Les premiers Analytiques* : « Le syllogisme est un discours dans lequel, certaines choses étant posées, quelque chose d'autre que ces données en découle nécessairement par le seul fait de ces données » (*Topiques*, I, 1, 100 a 25 et *Premiers Analytiques*, I, 1, 24 b 18-20).

Seul impératif la validité formelle : raisonnement rigoureux qui de deux prémisses (la majeure et la mineure) tire la conclusion qui s'y trouvait implicitement contenue (déduction analytique).

Définition de la cohérence d'un raisonnement ?

Un raisonnement est cohérent lorsqu'il est logique ie lorsqu'il obéit aux règles de la logiques dont la plus fondamentale est le principe de non contradiction :

pour Aristote ce principe de contradiction est un axiome, une vérité première, qui est vraie en vertu de son caractère évident et que l'on ne peut démontrer.

« Il est impossible qu'un même attribut appartienne et n'appartienne pas en même temps et sous le même rapport à une même chose » (Aristote, *Métaphysique*, livre Gamma, chap. 3, 1005 b 19-20)

Un raisonnement non contradictoire ne contient pas de propositions qui s'excluent mutuellement.

B) Sophismes et paralogismes

- Sophismes : J. de Romilly, *Les grands sophistes dans l'Athènes de Périclès*, 1988 (Manuel p. 406-407)

- Paralogismes : Descartes, *Discours de la Méthode*, IV

C) Les Éléments de géométrie d'Euclide

- voir les textes sur poly : L. Godeaux, *Les géométries*.
- Robert Blanché, *L'axiomatique*.
- Définitions de Postulats, Axiomes, manuel p. 350-351

Déduction synthétique : la géométrie euclidienne = proposition démontrée est synthétiquement construite à partir des prémisses en combinant plusieurs propositions intermédiaires.

La rigueur logique est une garantie de fiabilité de la démonstration car elle est pure obéissance soumission aux règles, de manière à exclure la possibilité de l'erreur liée à l'exercice subjectif, libre de la pensée. (Finalité : lutter contre faillibilité humaine, réduire le risque d'erreur).

Elle est pure contrainte que la pensée s'impose à elle-même afin de se protéger d'elle-même. Remplacer par un mécanisme (la machine à calculer) qui ne commet pas d'erreur par rapport à un être humain qui, parce qu'il est libre, est capable de faire des erreurs d'inattention, de penser à autre chose alors qu'il devrait se réduire à une action mécanique, machinale de compter, d'enchaîner rigoureusement (oubli de soi, disparition de soi).

II- Le modèle formel et la mathématique universelle

1- Métaphore de la chaîne

- Descartes : *Discours de la Méthode*, GF-Flammarion, 1966, p. 47-48

“Ces longues chaînes de raisons, toutes simples et faciles, dont les géomètres ont coutume de se servir, pour parvenir à leurs plus difficiles démonstrations, m'avaient donné l'occasion de m'imaginer que toutes choses, qui peuvent tomber sous la connaissance des hommes, s'entre-suivent en même façon et que, pourvu seulement qu'on s'abstienne d'en recevoir aucune pour vraie qui ne le soit, et qu'on garde toujours l'ordre qu'il faut pour les déduire les unes des autres, il n'y en peut avoir de si éloignées auxquelles enfin on ne parvienne, ni de si cachées qu'on ne découvre. Et je ne fus pas beaucoup en peine de chercher par lesquelles il était besoin de commencer : car je savais déjà que c'était par les plus simples et les plus aisées à connaître ; et considérant qu'entre tous ceux qui ont ci-devant recherché la vérité dans les sciences, il n'y a eu que les seuls mathématiciens qui ont pu trouver quelques démonstrations, c'est-à-dire quelques raisons certaines et évidentes, je ne doutais point que ce ne fût par les mêmes qu'ils ont examinées”.

- Leibniz, *Nouveaux Essais sur l'entendement humain*.

“Les hommes peuvent avoir des démonstrations rigoureuses sur le papier, et en ont sans doute une infinité. Mais sans se souvenir d'avoir usé d'une parfaite rigueur, on ne saurait avoir cette certitude dans l'esprit. Et cette rigueur consiste dans un règlement dont l'observation sur chaque partie soit une assurance à l'égard du tout ; comme dans l'examen de la chaîne par anneaux, où, visitant chacun pour voir s'il est fermé, et prenant des mesures avec la main pour n'en sauter aucun, on est assuré de la bonté de la chaîne. Et par ce moyen on a toute la certitude dont les choses humaines sont capables. Mais je ne demeure point d'accord qu'en mathématiques les démonstrations particulières sur la figure qu'on trace fournissent cette certitude générale. [...] Car il faut savoir que ce ne sont pas les figures qui donnent la preuve chez les géomètres. [...] La force de la démonstration est indépendante de la figure tracée, qui n'est que pour faciliter l'intelligence de ce qu'on veut dire et fixer l'attention ; ce sont les propositions universelles, c'est-à-dire les définitions, les axiomes, et les théorèmes déjà démontrés qui font le raisonnement et le soutiendraient quand la figure n'y serait pas ».

2- Distinction intuition /déduction

La connaissance comporte deux opérations principales : l'intuition et la déduction :

- René Descartes, *Règles pour la direction de l'esprit (1628), règle III,*

"Nous allons énumérer ici tous les actes de notre entendement par lesquels nous pouvons parvenir à la connaissance des choses sans aucune crainte d'erreur ; il n'y en a que deux : l'intuition et la déduction.

Par intuition j'entends, non pas le témoignage changeant des sens ou le jugement trompeur d'une imagination qui compose mal son objet, mais la conception d'un esprit pur et attentif, conception si facile, si distincte qu'aucun doute ne reste sur ce que nous comprenons; ou, ce qui est la même chose, la conception ferme d'un esprit pur et attentif qui naît de la seule lumière de la raison et qui, étant plus simple, est par suite plus pure que la déduction même, qui pourtant elle aussi ne peut être mal faite par l'homme [...]. Ainsi, chacun peut voir par intuition qu'il existe, qu'il pense, que le triangle est défini par trois lignes seulement, la sphère par une seule surface, et des choses de ce genre, qui sont bien plus nombreuses que ne le pourraient croire la plupart des hommes, parce qu'ils dédaignent de tourner leur esprit vers des choses si faciles [...].

On a déjà pu se demander pourquoi, outre l'intuition, nous avons ajouté un autre mode de connaissance qui se fait **par déduction**, opération par laquelle nous entendons tout ce qui se conclut nécessairement d'autres choses déjà connues avec certitude, bien qu'elles ne soient pas elles-mêmes évidentes, pourvu seulement qu'elles soient déduites à partir de principes vrais et connus par un mouvement continu et ininterrompu de la pensée qui a une intuition claire de chaque chose. C'est ainsi que nous savons que le dernier anneau d'une longue chaîne est relié au premier, même si nous

n'embrassons pas d'un seul et même coup d'oeil tous les intermédiaires dont dépend ce lien, pourvu que nous ayons parcouru ceux-ci successivement et que nous nous souvenions que du premier au dernier chacun tient à ceux qui lui sont proches. Nous distinguons donc ici l'intuition de la déduction certaine en ce qu'on conçoit en celle-ci un mouvement ou une certaine succession, tandis que dans celle-là, il n'en est pas de même ; et qu'en outre pour la déduction une évidence actuelle n'est pas nécessaire comme pour l'intuition, mais plutôt qu'elle reçoit en un sens sa certitude de la mémoire. D'où il résulte qu'au sujet des propositions, qui sont la conséquence immédiate des premiers principes, on peut dire, suivant la manière différente de les considérer, qu'on les connaît tantôt par intuition, tantôt par déduction ; mais les premiers principes eux-mêmes ne peuvent être connus que par intuition; et au contraire les conséquences éloignées ne peuvent l'être que par déduction”.

3- Critique du critère de l'évidence

Leibniz montre ici les limites du concept d'évidence. Le critère formel de cohérence logique est selon lui un meilleur garant de vérité:

➤ Leibniz, *Méditations sur la connaissance, la vérité et les idées* (1684).

« J'ai signalé ailleurs la médiocre utilité de cette fameuse règle qu'on lance à tout propos, – de ne donner son assentiment qu'aux idées claires et distinctes – si l'on n'apporte pas de meilleures marques du clair et du distinct que celles données par Descartes. Mieux valent les règles d'Aristote et des Géomètres, comme, par exemple, de ne rien admettre (mis à part les principes, c'est-à-dire les vérités premières ou bien les hypothèses), qui n'ait été prouvé par une démonstration valable, dis-je, à savoir, ne souffrant ni d'un vice de forme ni d'un vice matériel. Il y a vice matériel si l'on admet quoi que ce soit en dehors des principes ou de ce qui est démontré en retournant aux principes et à partir d'eux, par une argumentation valable. Par forme correcte, j'entends non seulement la syllogistique classique, mais aussi toute forme démontrée au préalable qui conclut par la force de son dispositif ; c'est ce que font aussi les formes opératoires d'arithmétique et d'algèbre ; les formes des livres de comptes, et même, d'une certaine façon, les formes du procès en justice. Mais en attendant, pour agir, nous nous contentons parfois d'un certain degré de vraisemblance ; d'ailleurs cette partie de la logique – la plus utile dans la vie – l'estimation du degré de probabilité, reste encore à faire. »

III- Limites et problèmes de la démonstration :

1- Pb des prémisses anapodictiques, les axiomes.

Axiomes /postulats : Blanché, *L'axiomatique*, 1959, « Les défauts de l'appareil euclidien ».

Les GNE : Rougier, *La philosophie de Poincaré*

L'axiomatique : Einstein, *La géométrie et l'expérience*.

2- Démonstration et vérification expérimentale

Vérité matérielle et validité formelle

Déduction / Induction

Les preuves logiques et de l'intuition intellectuelles sont insuffisantes. Nécessaire recours à l'expérience / expérimentation pour vérifier que la théorie scientifique est bien en accord avec la réalité objective concrète.

3- La raison désire l'absolu

Phénomène / noumène

Concept / idées de la raison

IV- Valeur des raisonnements argumentatifs non démonstratifs (sciences humaines, morale et politique)